濱塾予想問題集　～清水中学校（第２回９月）～

(★…平均点を目指す人　★★…平均以上を目指す人　★★★…トップを目指す人)

$\boxed{1}$　$-\sqrt{72} < -x < -\sqrt{33}$ が成り立つ整数 x の個数は何個ですか。(★★☆)

$x = \sqrt{x^2}$ なので，$33 < x^2 < 72$ となる x を考えます。

$5^2 = 25$，$6^2 = 36$，$7^2 = 49$，$8^2 = 6425$，$9^2 = 81$ なので，

$x = 6, 7, 8$ の３個

$\boxed{2}$　次の数について，有理数と無理数に分けましょう。(★☆☆)

$\sqrt{\frac{4}{9}}$	$-\frac{3}{13}$	$\sqrt{1}$	0	-3
$\sqrt{36}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{0.9}$	-2.3	$-\sqrt{\frac{22}{25}}$

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2}{3}$ なので有理数，$\sqrt{1} = \sqrt{1^2} = 1$ より有理数，

0 は有理数 (気を付けて)，$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$ より有理数，

$\sqrt{0.9}$ と $-\sqrt{\frac{22}{25}}$ は根号が外せないので無理数

よって，有理数：$\sqrt{\frac{4}{9}}, -\frac{3}{13}, \sqrt{1}, 0, -3, \sqrt{36}, -2.3$

無理数：$-\sqrt{2}, \sqrt{0.9}, \sqrt{\frac{22}{25}}$

$\boxed{3}$　$a\sqrt{b}$ の形になっているものは $\sqrt{c}$ の形に，$\sqrt{d}$ の形になっているものは $e\sqrt{f}$ の形に変形しましょう。(★☆☆)

(1)　$2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{8}$

(2)　$4\sqrt{5} = \sqrt{4^2 \times 5} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{80}$

(3)　$\sqrt{54}$

※平方数の $4(=2^2)$，$9(=3^2)$，$16(=4^2)$，$25(=5^2)$，$36(=6^2)$，$49(=7^2)$ でわっていきます。

$\sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = \sqrt{3^2 \times 6} = 3\sqrt{6}$

(4)　$\sqrt{300} = \sqrt{4 \times 75} = \sqrt{4 \times 25 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 5^2 \times 3}$

$= 2 \times 5 \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

(5)　$\sqrt{0.18} = \sqrt{\frac{18}{100}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{9 \times 2}}{\sqrt{10^2}} = \frac{\sqrt{3^2 \times 2}}{\sqrt{10^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$

(6)　$\sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{4 \times 3}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{2^2 \times 3}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

$\boxed{4}$　次の数の分母を有理化しましょう。(★★☆)

(1)　$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

(2)　$\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{5\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{5 \times 3} = \frac{1\sqrt{6}}{5 \times 1} = \frac{\sqrt{6}}{5}$

(3)　$\frac{4}{\sqrt{12}} = \frac{4}{\sqrt{4 \times 3}} = \frac{4 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{5}$　次の計算をしましょう。(★★☆)

(1)　$\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{14}$

(2)　$2\sqrt{3} \times (-8\sqrt{2}) = -16\sqrt{6}$

(3)　$2\sqrt{14} \times \sqrt{21}$ ※最大公約数を見つけるとラクです。

$2\sqrt{14} \times \sqrt{21} = 2\sqrt{7 \times 2} \times \sqrt{7 \times 3} = 2 \times (\sqrt{7})^2 \times \sqrt{2 \times 3}$

$= 2 \times 7 \times \sqrt{2 \times 3} = 14\sqrt{6}$

(4)　$\sqrt{20} \times \sqrt{15} = \sqrt{4 \times 5} \times \sqrt{15} = 2\sqrt{5} \times \sqrt{5 \times 3} = 2 \times 5 \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

(5)　$\sqrt{33} \div \sqrt{3} = \sqrt{11}$

(6)　$-4\sqrt{6} \div 2\sqrt{2} = -2\sqrt{3}$

(7)　$7\sqrt{33} \div \sqrt{22} = 7\sqrt{\frac{33}{22}} = 7\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{7\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{6}}{2}$

(8)　$\frac{\sqrt{12}}{4} \div \frac{\sqrt{6}}{6}$

※わり算は最初に約分するとラクです。

$= \frac{\sqrt{12}}{4} \times \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{\sqrt{1}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{6}$　$\sqrt{2} = 1.41$ としたときの，$\frac{2}{3\sqrt{2}}$ の値を求めましょう。(★★★)

まず有理化しましょう。

$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \div 3$

よって，$1.41 \div 3 = 0.47$

$\boxed{7}$　次の計算をしましょう。(★★☆)

(1)　$3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(2)　$\sqrt{12} + 5\sqrt{3} - \sqrt{27}$

$= \sqrt{4 \times 3} + 5\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(3)　$\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\sqrt{24}}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{6}}{2} + \frac{1 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}$

$= \frac{2\sqrt{6}}{6} + \frac{6\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{9\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

(4)　$\sqrt{18} - \frac{1}{\sqrt{12}} \times \sqrt{6}$

$= 3\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{1}$

$= 3\sqrt{2} - \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{8}$　次の計算をしましょう。(★★★)

(1)　$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$

(2)　$(2\sqrt{3}-\sqrt{6})(2\sqrt{3}+\sqrt{6}) = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2 = 4 \times 3 - 6 = 12 - 6 = 6$

(3)　$(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+1) - \frac{\sqrt{12}}{2}$

$= (\sqrt{3})^2 + (-2+1)\sqrt{3} - 2 \times 1 - \frac{2\sqrt{3}}{2}$

$= 3 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3}$

(4)　$(\sqrt{5}-2)^2 - (\sqrt{20}+4)$

$= (\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times 2 + 2^2 - (2\sqrt{5}+4)$

$= 5 - 4\sqrt{5} + 4 - 2\sqrt{5} - 4$

$= 5 - 6\sqrt{5}$

$\boxed{9}$　次の式の値を求めましょう。(★★☆)

(1)　$a = \sqrt{3} + 1$ のときの $a^2 - 2a - 3$ の値

$a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3) = (\sqrt{3}+1+1)((\sqrt{3}+1-3)$

$= (\sqrt{3}+2)((\sqrt{3}-2) = 3 - 2^2 = -1$

(2)　$x=\sqrt{7}+\sqrt{3}$，$y=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ のときの次の値

(a)　xy

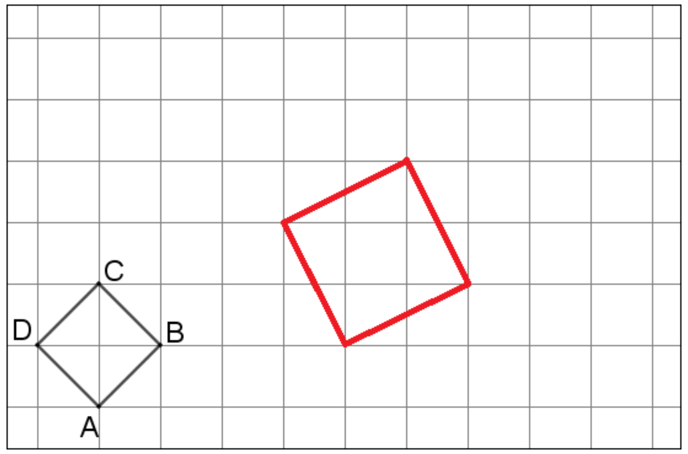
$(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})=7-3=4$

(b)　$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$=\{(\sqrt{7}+\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{3})\}\{(\sqrt{7}+\sqrt{3})-(\sqrt{7}-\sqrt{3})\}$

$=2\sqrt{7}\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{21}$

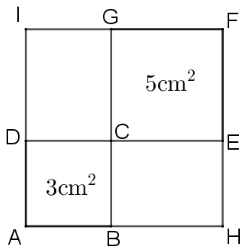
10　下の図は１目もりが１ cm であり，正方形 ABCD の面積が 2cm^2 なので，１辺の長さが $\sqrt{2}$cm になります。



このことを参考に，１辺の長さが $\sqrt{5}$cm の正方形をかきましょう。

上の図のように，直角三角形の直角をはさむ２辺が１ cm と２ cm の直角三角形の斜辺が正方形の１辺となる正方形をつくると１辺が $\sqrt{5}$cm の正方形ができる。(詳しくは三平方の定理でやります。)

11　下の図は，面積が 3cm^2 の正方形 ABCD と面積が 5cm^2 の正方形 CEFG をあわせた図形です。(★★★)



正方形 AHFI の面積は何 cm^2 ですか。

正方形 ABCD の１辺は $\sqrt{3}$cm で，正方形 CEFG の１辺は $\sqrt{5}$cm なので，正方形 AHFI の１辺は $\sqrt{3}+\sqrt{5}$(cm) となります。

よって，$(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=3+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}+5=8+2\sqrt{15}(\text{cm}^2)$

12　次のアからエまでの中から２次方程式をすべて選びましょう。(★☆☆)

ア　$x^2-1=0$

イ　$3x^2-6x+9=0$

ウ　$(x+1)^2=x^2$

$x^2+2x+1=x^2$　$2x+1=0$ より１次方程式

エ　$\frac{1}{2}x^2-4x=-\frac{1}{2}x^2+9$

$\frac{1}{2}x^2-4x+\frac{1}{2}x^2-9=0$　$x^2-4x-9=0$　より２次方程式

以上より，ア，イ，エ

13　次のアからエの２次方程式の中から，解が $x=-3$ であるものをすべて選びましょう。(★☆☆)

ア　$x^2-4x+3=0$

(左辺)$=(-3)^2-4\times(-3)+3=9+12+3=24$ より成り立たない。

イ　$x^2+4x+5=2$

(左辺)$=(-3)^2+4\times(-3)+5=9-12+5=2=$(右辺) より成り立つ。

ウ　$(x+3)(2x+7)=0$

(左辺)$=(-3+3)\times(-6+7)=0=$(右辺) より成り立つ。

エ　$2x^2+2x=x^2+5x+18$

(左辺)$=2\times(-3)^2+2\times(-3)=18-6=12$,

(右辺)$=(-3)^2+5\times(-3)+18=9-15+18=12$ より成り立つ。

よって，イ，ウ，エ

14　２次方程式 $x^2-4x+1=0$ を $(x+p)^2=q$ の形に直して解きましょう。(★★☆)

$x^2-4x=-1$　$(x^2-4x+\bigcirc=(x-2)^2)$ だから○は+4 なので,

$x^2-4x+4=-1+4$

$(x-2)^2=3$

$x-2=\pm\sqrt{3}$

$x=2\pm\sqrt{3}$

15　次の２次方程式を解きましょう。(★☆☆〜★★☆)

(1)　$x^2+4x+3=0$

$(x+1)(x+3)=0$

$x=-1,-3$

(2)　$(x-2)^2=5$

$x-2=\pm\sqrt{5}$　※展開しないように気を付けて

$x=2\pm\sqrt{5}$

(3)　$x^2-6x+6=0$

$x^2-6x=-6$

$x^2-6x+9=-6+9$

$(x-3)^2=3$

$x-3=\pm\sqrt{3}$

$x=3\pm\sqrt{3}$

(4)　$x^2=7$

$x=\pm\sqrt{7}$

(5)　$2x^2-x=0$

$x(2x-1)=0$

ここで，$2x-1=0$　$2x=1$　$x=\frac{1}{2}$ なので,

$x=0,\frac{1}{2}$

(6)　$x^2-3x+1=0$　２次方程式の解の公式より,

$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(7)　$(x-1)^2=16$

$x-1=\pm4$

$x=1\pm4$　※ここで終わらないように

$x=5,-3$

(8)　$12x^2=15$

$x^2=\dfrac{15}{12}$

$x^2=\dfrac{5}{4}$

$x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(9)　$2x^2-4x-3=0$　２次方程式の解の公式より,

$x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times2\times(-3)}}{2\times2}$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{16+24}}{4}$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{40}}{4}$

$x=\dfrac{4\pm2\sqrt{10}}{4}$　※約分し忘れに注意しよう。

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

$\boxed{16}$ 次の２次方程式を解きましょう。(★★☆)

(1)　$(x+1)(x-4)=2x+2$

$x^2-3x-4-2x-2=0$

$x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0$

$x=-1,6$

(2)　$2x(x+3)=(3-x)(3+x)$

$2x^2+6x=9-x^2$

$2x^2+6x-9+x^2=0$

$3x^2+6x-9=0$

両辺を３でわると，

$x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$

$x=1,-3$

(3)　$2x^2-14x+12=0$

両辺を２でわると，

$x^2-7x+6=0$

$(x-1)(x-6)=0$

$x=1,6$

(4)　$(x+2)^2+(x+1)(x-6)=0$

$x^2+4x+4+x^2-5x-6=0$

$2x^2-x-2=0$

２次方程式の解の公式より，

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times2\times(-2)}}{2\times2}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+16}}{4}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$$

$\boxed{17}$ 連続する３つの自然数があります。いちばん小さい数といちばん大きい数の積は，真ん中の数の５倍より５大きいです。この連続する３つの自然数を求めましょう。(★★☆)

連続する３つの自然数を x，$x+1$，$x+2$ とすると，

（※ $x-1$，x，$x+1$ などでも OK）

$x>0$…☆となる。

$x(x+2)=(x+1)\times5+5$

$x^2+2x=5x+5+5$

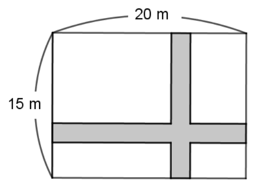
$x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0$

☆より，$x=5$

よって，５，６，７

$\boxed{18}$ 右の図のように縦 15m，横 20m の土地に，幅が一定の道をつくり，残りの土地にお花を植えて花壇にします。花壇の面積が 234m^2 となったとき，道の幅は何 m になっていますか。(★★☆)



道の幅を xm とすると，$0<x<15$…☆となる。

花壇の面積が 234m^2 なので，

$(15-x)(20-x)=234$

$300-35x+x^2-234=0$

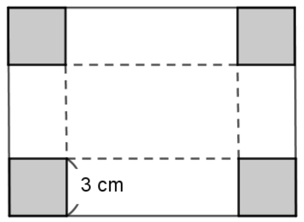
$x^2-35x+66=0$

$(x-2)(x-33)=0$

☆より，x=2

よって，道の幅は 2m

$\boxed{19}$ 横が縦よりも 14cm 長い長方形があります。この長方形の紙の４すみから１辺が 3cm の正方形を切り取って，ふたのない箱をつくると，その箱の容積が 720 cm^3 になりました。このとき，もとの長方形の縦の長さと横の長さはそれぞれ何 cm ですか。(★★★)



もとの長方形の縦の長さを $x$cm とすると，横の長さは $x+14$(cm) となり，

$x>6$…☆となる。

つくる直方体の縦は $x-6$(cm)，横は $x+14-6=x+8$(cm)，高さは 3cm なので，

$3(x-6)(x+8)=720$

両辺に３をわると，

$x^2+2x-48=240$

$x^2+2x-288=0$

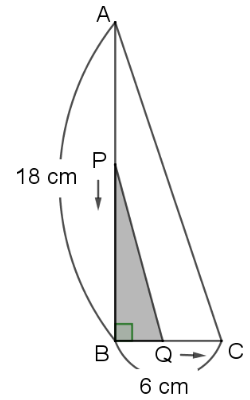
$(x-16)(x+18)=0$

☆より，$x=16$

よって，縦の長さ：16cm，横の長さ 30cm

$\boxed{20}$ $\angle B=90^\circ$ の直角三角形 ABC があります。点 P は点 A から点 B までを秒速 3cm で進みます。また，点 Q は点 P と同時に点 B を出発し，点 C までを秒速 1cm で進みます。

△ PBQ の面積が 12 cm^2 となるのは，点 P，Q が出発してから何秒後ですか。(★★★)



点 P，Q が出発してから x 秒後に△ PBQ の面積が 12 cm^2 となるとすると，

$0\leqq x\leqq6$…☆となる。

点 P は秒速 3cm で進むので，AP $=3x$(cm) となるから，

PB=AB−AP=$18-3x$(cm)

点 Q は秒速 1cm で進むので，BQ=x(cm) となるので，

$\frac{1}{2}(18-3x)x=12$

両辺に２をかけると，

$(18-3x)x=24$

$-3x^2+18x-24=0$

両辺を -3 でわると，

$x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

☆より，x=2,4

よって，２秒後，４秒後